Prozessfähigkeit bewerten

Kennzahlen für normalverteilte und nicht-normalverteilte Merkmale

Barbara Bredner

17.02.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Prozessfähigkeit

Ein Prozess ist fähig, wenn er die Anforderungen des Kunden „gut“erfüllt.

Verglichen wird die „Stimme des Kunden“mit der „Stimme des Prozesses“:

$$\text{Prozess-Fähigkeit} = \frac{\text{Stimme des Kunden}}{\text{Stimme des Prozesses}}$$

Die Stimme des Kunden wird (meistens) durch zwei Spezifikationsgrenzen angegeben: USG (Untere SpezifikationsGrenze) und OSG (Obere SpezifikationsGrenze). Der Abstand zwischen OSG und USG ist die Toleranzbreite, auch Toleranzfeld oder kurz Toleranz genannt.

Die Stimme des Prozesses wird durch das Prozess-Ergebnis vorgegeben, d. h. durch die Messungen an den Produkten oder Dienstleistungen.

1.1 Voraussetzungen für die Berechnung von Fähigkeiten

1.1.1 Fähiges Mess-System

Voraussetzung für die Berechnung von Fähigkeitskennzahlen ist, dass diese Messungen zuverlässig sind. Dazu ist es zwingend notwendig, dass eine MSA (Mess-System-Analyse) durchgeführt wurde und die Ergebnisse der MSA ein zuverlässiges Mess-System bestätigen.

Zuverlässig ist ein Mess-System, wenn Messwerte reproduzierbar sind, d. h. wenn Mehrfach-Messungen durch einen Prüfer gleiche Werte liefern und wenn Mehrfach-Messungen durch verschiedene Prüfer gleiche Werte liefern. Zudem muss die Auflösung des Messmittels groß genug sein (Kennzahl ndc / number of distinct categories > 5).

Wenn das Mess-System unzuverlässig ist oder nur ungenaue Werte über das Produkt oder die Dienstleistung liefert, kann mit den Messwerten der Prozess nur schlecht beurteilt werden. Insbesondere lassen sich mit einem schlechten Mess-System keine zuverlässigen und haltbaren Prozessfähigkeits-Indizes berechnen.

1.1.2 Ausreichend viele Messwerte

Neben einem fähigen Mess-System sind genügend viele Messwerte eine weitere Voraussetzung für die Beurteilung eines Prozesses. Als Daumenregeln für „genügend viele“werden oft $n = 100$ Werte genommen. Bei weniger Messwerten ist es schwierig, den Prozess zu beurteilen. Die absolute Untergrenze für die Anzahl Messwerte zur Prozess-Beurteilung sind $n = 50$ Werte. Damit sind Aussagen über die Prozess-Fähigkeit dann allerdings schon sehr wackelig.

1.1.3 Normalverteilte Messwerte

Die üblichen Fähigkeitskennzahlen lassen nur dann eine zuverlässige Abschätzung der Prozess-Fähigkeit zu, wenn die Messwerte normalverteilt sind. Wenn die Messwerte einer anderen Verteilung folgen, ist die Abschätzung unsicher, d. h. die Fähigkeit eines Prozesses wird mit den üblichen Formeln für C_p und C_{pk} über- oder unterschätzt.

Es gibt auch keine einfachen Korrekturfaktoren, mit denen die üblichen Formeln wieder zuverlässige Ergebnisse liefern würden. Berechnen lassen sich Fähigkeitskennzahlen allerdings immer, nur ist ihre Aussagekraft bei Abweichungen von der Normalverteilung deutlich geschwächt.

Bei einer Überschätzung wird es durch den Kunden zahlreiche (unerwartete) Reklamationen geben, da der Prozess die geforderte Fähigkeit in der Realität nicht erreicht. Wird die Fähigkeit unterschätzt, werden Produkte und Dienstleistungen unter Wert verkauft. Beide Situationen sind deshalb nicht erstrebenswert.

Alternativen für die Bestimmung der Fähigkeit liefert Abschnitt 4, S. 14ff.

1.1.4 Fähigkeitskennzahlen für attributive Merkmale

Die Normalverteilung ist natürlich nur bei variablen Messwerten wie Länge, Breite, Gewicht, usw. sinnvoll. Bei attributiven Prüfungen wie z. B. i. O. / n. i. O.-Prüfungen ergibt sich keine Normalverteilung, sondern eine Binomialverteilung. Die Bestimmung der Prozessfähigkeit erfolgt dann über den Anteil Schlecht-Teile.

2 Überprüfung der Verteilung

2.1 Ablauf der Verteilungsbestimmung

Unabhängig davon, welche Mess-Situation vorliegt, läuft die Verteilungsbestimmung immer nach demselben Muster ab:

1. GMV: Welche Verteilung passt zu der Mess-Situation?
2. Grafische und (wenn möglich) rechnerische Prüfung, ob die Verteilung für die gemessenen Werte angenommen werden kann
3. Beurteilung, ob GMV und Messwerte zusammenpassen

GMV steht für **G**esunden **M**enschen**V**erstand und ist das wichtigste Werkzeug in der Statistik. Je nachdem, welche Mess-Situation vorliegt, sind unterschiedliche Verteilungen nach GMV passend.

Wenn Messwerte aus einem stabilen System ohne systematische Einflüsse und ohne (wichtige) absolute Grenzen stammen, sind sie normalverteilt. Beispiel dafür sind Längenmaße oder Gewichte. Die absolute Grenze 0 bei Längen und Gewichten ist in den meisten Mess-Situationen aus statistischer Sicht nicht relevant, weil die 0 außerhalb des üblichen Wertebereichs liegt.

Andere Mess-Situationen, in denen andere Verteilungen entstehen, sind beispielsweise Lage- und Formmaße, da hier die absolute Nullgrenze häufig eine Rolle spielt und innerhalb des betrachteten Wertebereichs liegt. Dasselbe gilt für Lebensdauer-Analysen, bei denen meistens keine symmetrische Verteilung zu erwarten ist und deshalb auch nach GMV keine normalverteilten Werte angenommen werden können. Die Bestimmung von Fähigkeiten bei nicht-normalverteilten Werten liefert Abschnitt 4, S. 14ff.

2.2 Prüfung auf Normalverteilung

Die Prüfung auf Normalverteilung funktioniert über zwei Schritte:

1. Grafische Prüfung: Wahrscheinlichkeitsnetz / NQ-Plot
2. Rechnerische Prüfung: Test auf Normalverteilung

Beide Schritte sind notwendig, um das Prozess-Ergebnis sicher einschätzen zu können um anschließend haltbare Aussagen zur Fähigkeit zu treffen (wenn das Prozess-Ergebnis normalverteilt ist).

2.3 Wahrscheinlichkeitsnetz

In einem Wahrscheinlichkeitsnetz (in der Statistik NQ-Plot oder QQ-Plot oder PP-Plot) werden die Quantile der theoretischen Prüfverteilung (hier: der Normalverteilung) gegen die Messwerte gezeichnet. Ergibt sich (ungefähr) eine Linie in der Grafik, folgen die Werte der Stichprobe der theoretischen Verteilung. Abbildung 1 zeigt ein solches Wahrscheinlichkeitsnetz.

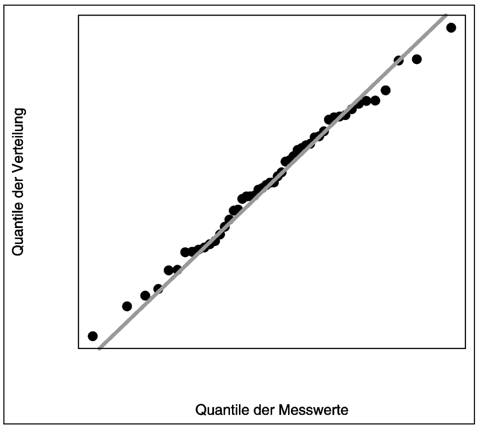

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsnetz

Um ein Wahrscheinlichkeitsnetz in Excel erstellen zu können, werden die Quantile der Normalverteilung benötigt. Zusätzlich ist es hilfreich, wenn in einem Wahrscheinlichkeitsnetz auch die Ideallinie eingezeichnet wird.

2.3.1 Quantile der Normalverteilung

Ein Quantil ist eine Kennzahl, bis zu der ein gewisser Anteil α einer Verteilung „verbraucht“ist. Das 50 %-Quantil ist beispielsweise der Wert, bis zu der die Hälfte der Werte einer Verteilung auftreten. Das 50 %-Quantil ist der Median.

Bei symmetrischen Funktionen wie der Normalverteilung ist der Median gleich dem Mittelwert, d. h. der höchste Punkt der Gaußschen Glockenkurve liegt beim 50 %-Quantil oder auch der Mittelwert der Normalverteilung ist gleich dem 50 %-Quantil.

Allgemein ist das α-Quantil u_α der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ ist der Wert für den gilt:

$$u_\alpha \ = \ \Phi^{-1}(\alpha)$$

mit Φ Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung:

$$\Phi(x) \ = \ \int_{\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \, dt$$

bzw. Φ^{-1} Umkehrfunktion der Standardnormalverteilung. Die Standardnormalverteilung ist die Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$.

Die Umkehrfunktion Φ^{-1} der Standardnormalverteilung kann nicht mit einer Funktion beschrieben werden.

Als Approximation für Quantile mit $0,5 \leq \alpha < 1$ kann der Algorithmus von Hasting verwendet werden:

$$u_\alpha \approx t \ - \ \frac{2,515517 \ + \ 0,802853 \cdot t \ + \ 0,010328 \cdot t^2}{1 \ + \ 1,432788 \cdot t \ + \ 0,189269 \cdot t^2 \ + \ 0,001308 \cdot t^3}$$

mit:

$$t \ = \ \sqrt{-2 \cdot \ln(1-\alpha)}$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$u_\alpha \ = \ -u_{1-\alpha}$$

2.3.2 Bestimmung der Normalverteilungsquantile für ein Wahrscheinlichkeitsnetz

Wenn geprüft wird, ob eine Messreihe normalverteilt ist, werden die Normalverteilungsquantile mit den Messwerten verglichen. Bei einer endlichen Anzahl von Messwerten wird angenommen, dass nicht die absolut größten und kleinsten Werte in dieser Messreihe enthalten sind. Deshalb werden bei den Quantilen der Prüfverteilung auch nicht die extremsten Werte (0 %- und 100 %-Quantile) verwendet, sondern etwas weniger extreme Werte.

Für die Bestimmung der optimalen Punkte für die Quantile gibt es verschiedene Berechnungsmöglichkeiten. Bei allen Formeln wird am oberen und unteren Ende etwas abgeschnitten und die Quantile werden über die restlichen Prozentwerte gleichmäßig (auch äquidistant, d. h. mit gleichem Abstand) verteilt.

Eine Formel für die Bestimmung der Quantilpunkte ist die folgende:

$$q_i \ = \ \frac{i - 0,5}{n}$$

mit $i = 1, \ldots, n$ laufende Nummer und n Anzahl Messwerte.

Für sehr kurze Messreihen mit 10 oder weniger Messwerten wird eine etwas abweichende Formel verwendet:

$$q_i \ = \ \frac{i - 0,375}{n + 0,25}$$

2.3.3 Bestimmung der Ideallinie für ein Wahrscheinlichkeitsnetz

Die Ideallinie für das Wahrscheinlichkeitsnetz wird über das 25 %- und das 75 %-Quantil der Messreihe und den dazu gehörenden Normalverteilungsquantilen bestimmt. (Für die Bestimmung von Quantilen einer Messreihe gibt es unterschiedliche Formeln, die zu leichten Differenzen in den Werten führen.)

Dazu wird eine Linie durch die beiden Punktepaare $(q_{0,25}, u_{q_{0,25}})$ und $(q_{0,75}, u_{q_{0,75}})$ gelegt. Abbildung 1 zeigt ein Wahrscheinlichkeitsnetz mit eingezeichneter Ideallinie.

2.3.4 Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsnetz

Tabelle 1 zeigt $n = 10$ Messwerte. (Dies ist natürlich für eine Prozessfähigkeitsuntersuchung eine zu geringe Anzahl von Messwerten.) In Tabelle 2 stehen dieselben Messwerte der Größe nach sortiert. Zusätzlich finden sich in der letzten Spalte die zu den Rangzahlen i die Quantilpunkte q_i (nach der zweiten Formel, da nur $n = 10$ Messwerte vorliegen) sowie die Quantile der Normalverteilung u_{q_i}.

Messwert-Nr.	**Messwert**
1	34,66
2	32,11
3	32,05
4	29,52
5	32,55
6	35,08
7	35,09
8	34,16
9	30,79
10	34,14

Tabelle 1: Messwerte

Messwert-Nr.	**Messwert-Nr.**	**Rang** i	**Quantilpunkt** q_i	**Quantil** u_{q_i}
4	29,52	1	0,0610	-1,5466
9	30,79	2	0,1585	-1,0005
3	32,05	3	0,2561	-0,6554
2	32,11	4	0,3537	-0,3755
5	32,55	5	0,4512	-0,1226
10	34,14	6	0,5488	0,1226
8	34,16	7	0,6463	0,3755
1	34,66	8	0,7439	0,6554
6	35,08	9	0,8415	1,0005
7	35,09	10	0,9390	1,5466

Tabelle 2: Geordnete Messwerte (Rang) und Quantile

Für den ersten Quantilpunkt $q_i = q_1$ in der ersten Zeile ergibt sich der Wert 0,0610 über die Formel:

$$q_i = \frac{i - 0,375}{n + 0,25} \overset{i=1\ n=10}{=} \frac{1 - 0,375}{10 + 0,25} = \frac{0,625}{10,25} = 0,0610 = 6,1\%$$

Damit entspricht der erste Messwert der Messreihe (theoretisch) dem 6,1 %-Quantil der Normalverteilung, wenn die Messwerte tatsächlich aus einer Normalverteilung stammen.

In das Wahrscheinlichkeitsnetz werden die Punktpaare (Messwert mit Rang i, Normalverteilungsquantil u_{q_i}) eingezeichnet. Abbildung 2 zeigt für die 10 Messwerte das dazu gehörende Wahrscheinlichkeitsnetz.

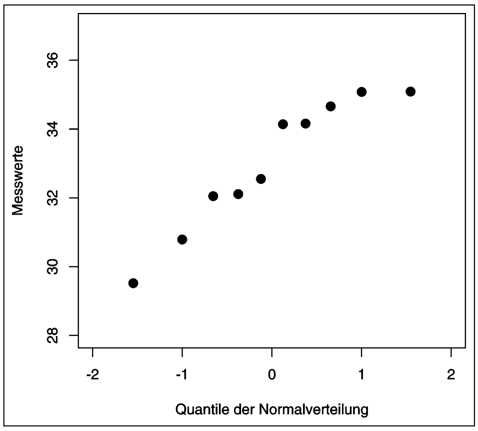

Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsnetz

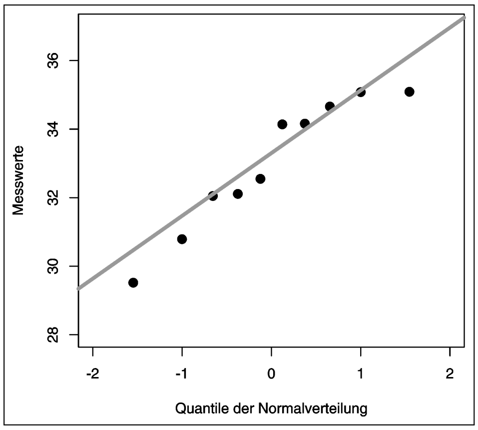

Abbildung 3: Wahrscheinlichkeitsnetz mit Ideallinie

Zur einfacheren Abschätzung, ob Messwerte aus einer Normalverteilung stammen, wird häufig die Ideallinie eingezeichnet. In Abbildung 3 ist für das Beispiel die Ideallinie zusätzlich eingezeichnet worden.

Zu sehen ist, dass die Punkte der Linie halbwegs gut folgen. Hier sind im ersten Schritt der Verteilungsprüfung keine deutlichen Abweichungen von der Normalverteilung erkennbar. (Das ist bei nur $n = 10$ Messwerten „normal“, da sich andere Strukturen meist erst bei mehr Messwerten zeigen.)

2.4 Test auf Normalverteilung

Beim Test auf Normalverteilung wird rechnerisch geprüft, ob Messwerte aus einer Normalverteilung stammen. Diese rechnerische Prüfung funktioniert ähnlich wie die grafische Prüfung mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes: Es wird verglichen, welche Messwerte theoretisch (d. h. bei Normalverteilung) vorliegen müssten und bestimmt, wie groß die Abweichungen der Realität von der Theorie sind.

Beim Testen auf Normalverteilung gibt es zahlreiche Testverfahren. Die meisten gebräuchlichen wie der χ^2-Test, der Test von Kolmogorov-Smirnoff und der Lilliefors-Test sind aus statistischer Sicht völlig ungeeignet, um Messwerte auf eine Verteilung zu prüfen. Die Wahrscheinlichkeit mit diesen Tests eine falsche Entscheidung wie „Messwerte sind normalverteilt“zu treffen, liegt je nach Testsituation bei über 50 %, d. h. es wäre einfacher eine Münze zu werfen und das Fehlerrisiko immer noch geringer.

Gute Tests auf Normalverteilung sind der Shapiro-Wils, Shapiro-Francia, Ryan-Joiner, Cramer-van Mises und der Anderson-Darling-Test. Am einfachsten in Excel zu implementieren ist der Anderson-Darling Test.

2.4.1 Hypothesen bei Normalverteilungstests

Statistische Hypothesen:

H_0 : Messwerte sind normalverteilt. vs. H_1 : Messwerte sind nicht normalverteilt.

mit

H_0	Nullhypothese
H_1	Alternative bzw. Gegenhypothese
$x_1, \ldots, x_n$	Messwerte für die die Verteilung geprüft wird

Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn der p-Wert des Tests zu klein ist. Im allgemeinen wird die Normalverteilungsannahme abgelehnt, wenn $p < 0,05 = 5\%$ ist.

2.4.2 Teststatistik des Anderson-Darling-Tests

Für den Anderson-Darling Test werden die Hilfsgrößen $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2 = S^2$ und $p_{(i)}$ benötigt:

Mittelwert der Stichprobe

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Varianz der Stichprobe

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

bzw. die **Standardabweichung der Stichprobe** als:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Für die Hilfsgröße $p_{(i)}$ werden die Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ geordnet, standardisiert und anschließend der Funktionswert der Standardnormalverteilung Φ berechnet:

$$p_{(i)} = \Phi\left(\frac{x_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$$

Die **Teststatistik des Anderson-Darling-Tests** ist dann gegeben als:

$$\mathsf{T}_{AD} = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (2i-1)\left(\ln(p_{(i)}) + \ln(1 - p_{(n-i+1)})\right)$$

Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn T_{AD} zu groß ist.

Die p-Werte für die Anderson-Darling-Teststatistik werden je nach Wert der Hilfsgröße z approximiert.

$$z = \mathsf{T}_{AD}\left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2}\right)$$

z	p-Wert (approximativ)
$z \leq 0,2$	$1 - \exp(-13,436 + 101,14z - 223,73z^2)$
$0,2 < z \leq 0,34$	$1 - \exp(-8,318 + 42,796z - 59,938z^2)$
$0,34 < z \leq 0,6$	$\exp(0,9177 - 4,279z - 1,38z^2)$
$0,6 < z$	$\exp(1,2937 - 5,709z + 0,0186z^2)$

2.4.3 Beispiel Normalverteilungstest

Für die Messreihe in Tabelle 1 ergibt sich ein Wert für die Teststatistik des Anderson-Darling-Tests von

$$\mathsf{T}_{AD} = 0,3834$$

Damit ist z gegeben als:

$$z = 0,4208$$

Nach der Formel aus der oben angegebenen Tabelle ergibt sich ein p-Wert von:

$$p = 0,3240 > 0,05 = 5\%$$

Da dieser p-Wert größer als 5 % ist, wird die Nullhypothese H_0 beibehalten. Somit liefert auch der Test auf Normalverteilung keine Anzeichen für eine Abweichung der Messwerte von der theoretisch angenommenen Verteilung.

Zusammen mit den Ergebnissen des Wahrscheinlichkeitsnetzes sind die Messwerte damit normalverteilt.

3 Berechnung von Fähigkeits-Kennzahlen für normalverteilte Merkmale

Voraussetzung für die Berechnung von **aussagekräftigen** Fähigkeitskennzahlen ist die Normalverteilung der Messwerte.

3.1 Der Fähigkeitsindex C_p

Der Fähigkeitsindex C_p vergleicht die Toleranzbreite mit der Prozess-Streuung. Wenn die Toleranzbreite dem 6fachen der Prozess-Streuung entspricht, ist der $C_p = 1$. In diesem Fall liegen 99,73 % der Messwerte innerhalb der Toleranz.

Der Fähigkeitsindex C_p wird berechnet über die Formel:

$$C_p = \frac{USG - OSG}{6 \cdot \sigma}$$

Da die tatsächliche Prozess-Streuung meist unbekannt ist, wird sie aus beobachteten Messwerten berechnet, d. h. geschätzt:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Damit ergibt sich ein geschätzter C_p-Wert von:

$$\widehat{C_p} = \frac{USG - OSG}{6 \cdot \hat{\sigma}} = \frac{USG - OSG}{6 \cdot S}$$

3.2 Der Fähigkeitsindex C_{pk}

Der C_{pk} berücksichtigt neben der Prozess-Streuung auch die Prozess-Lage. Wird ausschließlich der C_p zur Beurteilung eines Prozesses verwendet, werden (mögliche) Abweichungen der Prozess-Lage von der Mitte des Toleranzbereichs vernachlässigt. Schlimmstenfalls kann ein Prozess völlig außerhalb der Toleranz liegen und dennoch durch eine relativ kleine Streuung einen hohen C_p-Wert haben.

Der Fähigkeitsindex C_{pk} wird berechnet über die Formeln:

$$C_{pku} = \frac{\mu - USG}{3 \cdot \sigma}$$

$$C_{pko} = \frac{OSG - \mu}{3 \cdot \sigma}$$

$$C_{pk} = \min\{ C_{pku} , C_{pko} \}$$

Die tatsächliche Prozess-Streuung und die tatsächliche Prozess-Lage sind fast immer unbekannt und müssen deshalb aus beobachteten Messwerten berechnet (d. h. geschätzt) werden:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Der C_{pk}-Wert wird dann mit diesen Schätzungen bestimmt:

$$\widehat{C_{pku}} = \frac{\hat{\mu} - USG}{3 \cdot \hat{\sigma}} = \frac{\bar{x} - USG}{3 \cdot S}$$

$$\widehat{C_{pko}} = \frac{OSG - \hat{\mu}}{3 \cdot \hat{\sigma}} = \frac{OSG - \bar{x}}{3 \cdot S}$$

$$\widehat{C_{pk}} = \min\{ \widehat{C_{pku}} , \widehat{C_{pko}} \}$$

3.3 Beispielrechnung C_p und C_{pk}

Ein Kunde hat als Toleranzgrenzen für die Länge eines Stahlrohrs folgende Werte angegeben:

$$USG \ = 394\,mm$$
$$OSG \ = 406\,mm$$
$$Z \ = 400\,mm$$
$$T \ = OSG \ - USG \ = 406 - 394 \ = 12\,mm$$

mit USG **U**ntere **S**pezifikations-**G**renze, OSG **O**bere **S**pezifikations-**G**renze, Z **Z**ielwert und T **T**oleranzbreite.

Nach der Fertigung der Stahlrohre ist die Länge gemessen worden. Mit diesen Messwerten wurden folgende Schätzungen für die Prozess-Lage und -Streuung bestimmt:

$$\hat{\mu} \ = \bar{x} \ = 400,8\,mm$$
$$\hat{\sigma} \ = 1,2\,mm$$

Der C_p berechnet sich mit den oben angegebenen Toleranzgrenzen und Prozess-Werten zu:

$$\widehat{C_p} \ = \frac{USG \ - OSG}{6 \cdot \hat{\sigma}} \ = \frac{T}{6 \cdot S} \ = \frac{12}{6 \cdot 1,2} \ = \frac{12}{7,2} \ = 1,67$$

d. h. es ist $C_p \ = 1,67$.

Für den C_{pk} ergeben sich mit den oben angegebenen Toleranzgrenzen und Prozess-Werten folgende C_{pku}- und C_{pko}-Werte:

$$\widehat{C_{pku}} \ = \frac{\hat{\mu} - USG}{3 \cdot \hat{\sigma}} \ = \frac{\bar{x} - USG}{3 \cdot S} \ = \frac{400,8 - 394}{3 \cdot 1,2} \ = \frac{6,8}{3,6} \ = 1,89$$

$$\widehat{C_{pko}} \ = \frac{OSG \ - \hat{\mu}}{3 \cdot \hat{\sigma}} \ = \frac{OSG \ - \bar{x}}{3 \cdot S} \ = \frac{406 - 400,8}{3 \cdot 1,2} \ = \frac{5,2}{3,6} \ = 1,44$$

$$\widehat{C_{pk}} \ = \min\{\,\widehat{C_{pku}}\,,\,\widehat{C_{pko}}\,\} \ = \min\{\,1,89\,,\,1,44\,\} \ = 1,44$$

d. h. es ist $C_{pk} \ = 1,44$.

3.4 Umrechnung Fähigkeitsindex in ppm , Prozess-Ausbeute und umgekehrt

3.4.1 Umrechnung Fähigkeitsindex in ppm

ppm ist die Abkürzung für “defective parts per million“ und gibt die Anzahl fehlerhafter Teile pro eine Million gefertigter Teile an.

Wenn die Messwerte normalverteilt sind, dann ist die Verteilung mit Mittelwert und Standardabweichung vollständig festgelegt. Dadurch kann dann auch die Anzahl fehlerhafter Teile außerhalb der Toleranz ppm bestimmt werden.

3.4.2 Umrechnung Fähigkeitsindex in Prozess-Ausbeute

Die Prozess-Ausbeute ist der Anteil gefertigter Teile innerhalb der Toleranz. Je höher dieser Anteil ist, desto fähiger ist der Prozess bzw. desto größer sind die Fähigkeitsindizes C_p und C_{pk}.

Bei normalverteilten Messwerten lässt sich der Anteil der Werte innerhalb der Toleranzgrenzen USG und OSG über die Quantile der Normalverteilung berechnen. Diese Quantile sind eindeutig über die geschätzte Prozess-Lage und -Streuung bestimmbar.

Beim Beispiel zur Länge der Stahlrohre sind die Prozess-Lage und Streuung gegeben als:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 400,8\,mm$$

$$\hat{\sigma} = 1,2\,mm$$

Damit ist die Normalverteilung der Messwerte gegeben als NV$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, d. h. eine Normalverteilung mit Mittelwert $400,8mm$ und Varianz $1,44 = 1,2^2$ (Quadrat der Standardabweichung).

Um die Anteile der Teile innerhalb der Toleranzgrenzen zu bestimmen, werden die Werte der Normalverteilung an den Toleranzgrenzen USG und OSG berechnet (am einfachsten mit einem entsprechenden Statistik-Programm oder in Excel).

Gesucht sind also für die Toleranzgrenzen

$$USG = 394mm$$

$$OSG = 406mm$$

die Werte der Normalverteilung NV$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$. p_u ist dabei der Wert der Normalverteilung an der unteren Toleranzgrenze USG . p_o ist entsprechend der Wert an der oberen Toleranzgrenze OSG .

$$p_u = P(X \leq USG\,) = P(X \leq 394) = 0,0000000073$$

$$p_o = P(X \leq OSG\,) = P(X \leq 406) = 0,9999926566$$

d. h. ein winziger Anteil von 0,00000007 % der Messwerte für die Rohrlänge ist kürzer als die untere Toleranzgrenze USG . Die meisten Stahlrohre, nämlich 99,99926566 % sind kürzer als die obere Toleranzgrenze OSG .

Um den Anteil der Stahlrohre zu bestimmen, die länger als die untere Toleranzgrenze, aber kürzer als die obere Toleranzgrenze sind, wird der Anteil der zu kurzen Rohre p_u vom Anteil der nicht zu langen Rohre p_o abgezogen:

$$p_t = p_o - p_u = 0,9999926566 - 0,0000000073 = 0,9999926493$$

d. h. der Anteil der Rohre innerhalb der Toleranz ist 99,99926493 %.

3.4.3 Umrechnung der Prozess-Ausbeute in ppm

Die Prozess-Ausbeute ist der prozentuale Anteil Gut-Teile. Der prozentuale Anteil der Schlecht-Teile p_s, d. h. der Teile außerhalb der Toleranzgrenzen ist damit gegeben als:

$$p_s = 1 - p_t = 1 - 0,9999926493 = 0,0000073507$$

Diese Zahl ist an sich klein. In der Serienfertigung wird deshalb als Kennzahl die Anzahl Schlecht-Teile pro eine Million Teile verwendet. Mit dem oben berechneten Anteil Schlecht-Teile ergibt sich für die Rohrlänge eine ppm von:

$$p_s \cdot 1.000.000 \;=\; 0,0000073507 \cdot 1.000.000 \;=\; 7,3507$$

Der ppm -Wert ist also gleich 7,3507, d. h. etwa 7 von 1.000.000 Rohrlängen liegen außerhalb der Toleranzgrenzen.

4 Berechnung von Fähigkeitskennzahlen für nicht-normalverteilte Merkmale

Grundsätzlich gibt es zwei Situationen, in denen Merkmalswerte nicht normalverteilt sind:

1. Die Messwerte folgen einer anderen Verteilung als der Normalverteilung auf Grund der **Mess-Situation**.
2. Die Messwerte folgen einer anderen Verteilung als der Normalverteilung, weil es **systematische Einflüsse auf den Prozess** gibt.

4.1 Fähigkeitskennzahlen für Merkmale aus anderen Verteilungen

Andere Verteilungen als die Normalverteilung entstehen zwangsläufig immer dann, wenn die Mess-Situation keine normalverteilten Werte liefern kann. Dies ist beispielsweise bei Form- und Lagetoleranzen der Fall, bei denen durch die Nullgrenze die Verteilung schief bzw. asymmetrisch wird. Ein anderer Bereich, in dem von der Normalverteilung abweichende Verteilungen auftreten, sind Lebensdauer- und Zuverlässigkeits-Untersuchungen, bei denen z. B. mit Weibull-Verteilung gearbeitet wird.

Um die Fähigkeit eines Prozesses zu beurteilen, der nicht-normalverteilte Werte auf Grund der Mess-Situation liefert (nicht auf Grund von systematischen Einflüssen im Prozesses, vgl. Abschnitt 4.3), S. 20ff.), muss die passende Verteilung bestimmt werden. Die Verteilungsbestimmung läuft in diesem Fall wie in Abschnitt 2.1, S. 4 beschrieben.

4.1.1 Ansätze in der Fähigkeitsbestimmung, die nicht funktionieren

Es gibt immer wieder Anwender und Software-Programme, die davon ausgehen, dass die „richtige“Verteilung aus den Messwerten berechnet werden könnte. Das ist aus zwei Gründen falsch:

Erstens sind sich viele Verteilungen sehr ähnlich, so dass es kaum Unterschiede in den Funktionswerten gibt. Wenn zu diesen Ähnlichkeiten noch eine gewisse Mess-Unsicherheit kommt, die gerade bei Form- und Lagemaßen eine große Rolle spielen (können), gleicht das Ausrechnen der „richtigen“Verteilung einer Lotterie. Vielleicht trifft man den Hauptgewinn. Viel wahrscheinlicher ist es, eine Niete zu ziehen.

Das gilt auch für den Ansatz, nicht-normalverteilte Messwerte über Transformationen (wie Box-Cox und Johnson-Transformationen) normalverteilt zu hämmern. Mit diesen Transformationen werden wichtige Informationen aus den Messwerten ignoriert. Das ist für eine zuverlässige Prozess-Beurteilung und Fähigkeits-Bewertung unsinnig.

Der zweite Grund, warum die Berechnung der „richtigen"Verteilung nicht funktioniert ist, dass das Risiko für eine falsche Entscheidung bei bis zu 50 % liegt. In der Statistik wird mit Stichproben gearbeitet, d. h. es liegen nie alle Informationen aus einem Prozess vor, sondern immer nur ein Teil der Informationen. Damit gibt es auch immer ein Risiko, mit statistischen Verfahren wie der rechnerischen Verteilungsauswahl eine falsche Entscheidung zu treffen. Je mehr Verteilungen auf Stimmigkeit geprüft werden, desto größer wird das Risiko, die falsche Verteilung auszuwählen. (In Statistiker-Sprache: Die Risiken für die Fehler 1. und 2. Art α und β steigen an.)

Wird beispielsweise die Sicherheit dafür, dass die richtige Verteilung ausgewählt wird, auf 95 % festgelegt, gibt es bei jeder einzelnen Entscheidung ein Risiko von 5 %, daneben zu liegen. Bei zwei Entscheidungen ergibt sich eine Sicherheit von 95% der ersten 95 %, usw.:

Sicherheit bei der 1. Entscheidung:	$95\% = 0,95$
Sicherheit bei der 2. Entscheidung:	$95\% \cdot 95\% = 0,95 \cdot 0,95 = 0,95^2 = 0,9025 = 90\%$
Sicherheit bei der 3. Entscheidung:	$95\% \cdot 95\% \cdot 95\% = 0,95^3 = 0,8574 = 86\%$
$\vdots$	$\vdots$
Sicherheit bei der 10. Entscheidung:	$0,95^{10} = 0,5987 = 60\%$
$\vdots$	$\vdots$
Sicherheit bei der 14. Entscheidung:	$0,95^{15} = 0,4877049\% < 50\%$

Die mit der Anzahl der Entscheidungen rapide sinkende Sicherheit stellt Abbildung 4 grafisch dar.

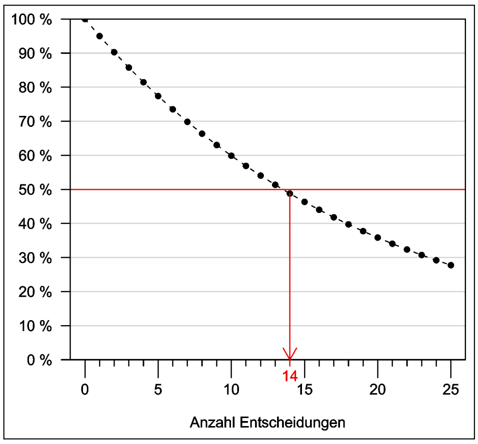

Abbildung 4: Sicherheit der Entscheidung nach Anzahl geprüfte Verteilungen

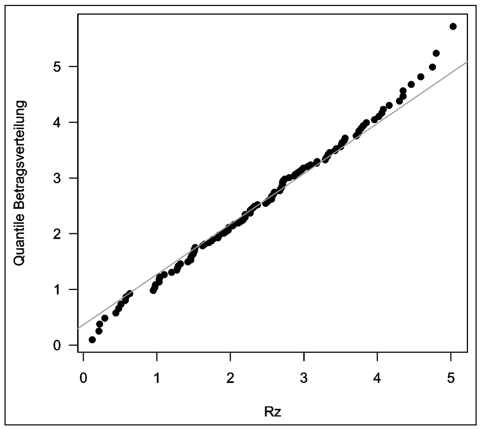

Abbildung 5: Wahrscheinlichkeitsnetz Betragsverteilung 1. Art

Da viele mögliche Verteilungen für eine Mess-Situation in Frage kommen, werden häufig deutlich mehr als 10 Verteilungen als mögliche Kandidaten geprüft. Ab dem Testen von 14 Verteilungen sinkt die Sicherheit bei der Entscheidung auf unter 50 %, so dass ein Münzwurf eine größere Sicherheit bietet. Beim Münzwurf ist jede Entscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % richtig.

4.2 Beispiel nullbegrenzte Merkmale: Betragsverteilung 1. Art

Bei Form- und Lage-Merkmalen, deren Messwerte nahe der Nullgrenze liegen, ist die geeignete Verteilung die Betragsverteilung 1. Art (oder auch gestutzte Normalverteilung, truncated normal distribution). Diese Verteilung wird genau wie die Normalverteilung durch zwei Kenngrößen festgelegt. Leider lassen sich als

Kenngrößen nicht die üblichen beiden Kennzahlen Mittelwert und Standardabweichung verwenden, da die Betragsverteilung deutlich schwieriger zu bestimmen ist.

Die ISO 21747 soll für diese Mess-Situation und auch für andere Mess-Situationen, in denen keine normalverteilten Werte vorliegen, Abhilfe schaffen. Die Fähigkeits-Abschätzungen nach den Methoden M1-M4 sind allerdings so ungenau, dass Prozess-Fähigkeiten systematisch unter- oder überschätzt werden. Mit den Methoden M3 und M4 wird ein Prozess durchgängig zu gut bewertet und zwar um mindestens den Faktor 10.

Insofern bleibt für eine **zuverlässige Fähigkeitsabschätzung** ausschließlich der Weg über die Verteilung selbst und die ppm-Berechnung aus der Verteilung wie in Abschnitt 3.4.2 (S. 13) beschrieben. Anstatt der Normalverteilungsquantile werden die Quantile der Verteilung verwendet, die für die Mess-Situation geeignet ist.

4.2.1 Bestimmung der Betragsverteilung 1. Art

Die Dichtefunktion der Betragsverteilung 1. Art (gestutzte Normalverteilung) mit Grenzpunkten a und b ist gegeben als:

$$f(x;\mu,\sigma) \;=\; \frac{\exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)}{\int\limits_a^b \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)dt}\; I_{[a,b]}(x)$$

mit I Indikatorfunktion, μ Mittelwert der ungestutzten Verteilung, σ Standardabweichung der ungestutzten Verteilung.

Bei nullbegrenzten Merkmalen ist $a = 0$ und $b = \infty$, so dass sich die Dichtefunktion schreiben lässt als:

$$f(x;\mu,\sigma) \;=\; \frac{\exp\left(\frac{(x-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)}{\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{-2\sigma^2}\right)dt}\; I_{[0,\infty)}(x)$$

Sind also die Kennzahlen μ und σ der ungestutzen (nicht beobachtbaren) Verteilung bekannt, kann die Dichtefunktion angegeben werden. Gemessen werden allerdings die Werte der gestutzten Verteilung μ_t und σ_t, d. h. μ und σ müssen zuerst bestimmt werden.

Für die allgemeine Betragsverteilung 1. Art mit zwei Grenzpunkten a und b wird der so genannte EM-Algorithmus eingesetzt. Bei nullbegrenzten Merkmalen mit nur einem Grenzpunkt a funktioniert der EM-Algorithmus auch, allerdings gibt es einen einfacheren Rechenweg, um μ_t und σ_t zu bestimmen.

1. Bestimmung von Mittelwert $\mu_t = \bar{x}$ und Standardabweichung $\sigma_t = S$ der Messreihe:

$$\mu_t = \bar{x} \;=\; \frac{1}{n}\,(x_1 + \cdots + x_n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_t = S \;=\; \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i \;-\; \bar{x})^2}$$

2. Berechnung einer Hilfsgröße $Q(\omega)$ über eine Hilfsgröße ω und zwei Polynome P_3 und P_4 bei einem unteren Stutzpunkt a:

$$\omega = \frac{\sigma_t^2}{(a-\mu_t)^2}$$

$$P_3(\omega) = 1 + 5,74050101\omega - 13,53427037\omega^2 + 6,88665552\omega^3$$

$$P_4(\omega) = -0,00374615 + 0,17462558\omega - 2,87168509\omega^2 + 17,48932655\omega^3 - 11,91716546\omega^4$$

$$Q(\omega) = \frac{P_4(\omega)}{P_3(\omega)}$$

3. Berechnung der ungestutzten Parameter μ und σ:

$$\mu = \mu_t + Q(\omega) \cdot (a - \mu_t)$$

$$\sigma^2 = \sigma_t^2 + Q(\omega) \cdot (a - \mu_t)^2$$

Mit den Kennzahlen μ und σ^2 ist die Betragsverteilung 1. Art mit dem unteren Stutzpunkt a festgelegt. Bei einem nullbegrenzten Merkmal ist $a = 0$.

Die Quantile der Verteilung liefert z. B. das OpenSource Statistikprogramm R (http://cran.r-project.org) über das Package `msm` mit der Funktion
`qtnorm(Prozentwert,`μ`,`σ`,`a`)`

Die Kennzahl ppm lässt sich über die Funktion
`(1-ptnorm(OSG ,`μ`,`σ`,`a`))`$\cdot 1.000.000$
berechnen.

4.2.2 Prozessfähigkeits-Kenngrößen bei nullbegrenzten Merkmalen

Da nullbegrenzte Merkmale die absolute Grenze bei 0 haben, führt die Berechnung des C_p-Indizes oft dazu, dass die Fähigkeit unterschätzt wird, da die Streuung verglichen mit der Toleranzbreite zu groß zu sein scheint. Der C_p-Index funktioniert daher für nullbegrenzte Merkmale nicht.

Sinnvoller ist entweder die Angabe der zu erwartenden ppm oder die Bestimmung des C_{pk}-Indizes. Die ppm können wie bei der Normalverteilung beschrieben über die Verteilung der Merkmale bestimmt werden. Bei nullbegrenzten Merkmalen sind (meist) nur Messwerte über der oberen Spezifikationsgrenze OSG außerhalb der Spezifikation. Der C_{pk}-Index entspricht deshalb dem C_{pko}:

$$C_{pk} = \widehat{C_{pko}} = \frac{OSG - q_{50}}{q_{99,865} - q_{50}}$$

Für die Berechnung des C_{pk}-Werts gibt es zwei Methoden:

1. Methode 1: Berechnung über die Quantile der Verteilung
2. Methode 2: Berechnung über die Quantile der Messreihe

Bei beiden Methoden wird die Fähigkeit über Quantilwerte bestimmt, genauer über das 50 %-Quantil q_{50} und das 99,865 %-Quantil $q_{99,865}$. Der Unterschied in der Berechnung entsteht durch die verschiedenen Wege, in denen die Quantile ermittelt werden. Bei Methode 1 werden die Quantile auf Basis der Betragsverteilung 1. Art verwendet. Methode 2 bestimmt die Quantile allein auf Basis der Messreihe.

Die erste Methode führt zu zuverlässigen Ergebnissen, ist allerdings aufwändiger, da die Verteilungsparameter μ und σ vorher berechnet werden müssen (s. o.) Die zweite Methode ist vom Rechenaufwand her einfacher, liefert allerdings wenig zuverlässige Ergebnisse. Sie wird von der ISO 21747 empfohlen (M4-Methode).

4.2.3 Beispiel Prozessfähigkeit bei Betragsverteilung 1. Art

In einem Prozess wird die von Oberflächen nach dem Polieren gemessen. (Auf die Schwierigkeiten der Rauheitsbestimmung sowie die Fähigkeit des Mess-Systems wird an dieser Stelle verzichtet. In der Praxis sollten beide Aspekte vor der Bewertung des Prozesses mit Fähigkeitskennzahlen sorgfältig beachtet werden.)

Die Rauheit ist ein nullbegrenztes Merkmal, da keine Oberfläche mehr als glatt sein kann. Es wurde an insgesamt $n = 120$ Bauteilen jeweils 1 Mal die maximale Rauheit R_z gemessen. Die Spezifikation des Kunden gibt vor, dass die Rauheit R_z maximal $6\mu m$ groß sein darf.

Als nullbegrenztes Merkmal müsste R_z nach GMV (gesundem Menschenverstand, s. Abschnitt 2.1, S. 4) einer Betragsverteilung 1. Art folgen. Um diese Annahme zu prüfen, wird ein Wahrscheinlichkeitsnetz für die Messreihe erstellt und abgeglichen, wie groß die Abweichungen zwischen Theorie (Quantile der Betragsverteilung 1. Art) und Praxis (Messreihe) ist.

Bestimmung der Betragsverteilung 1. Art Um die Quantile der Betragsverteilung berechnen zu können, muss zuerst die Betragsverteilung bestimmt werden, d. h. die Parameter μ und σ errechnet werden. Für die vorliegenden $n = 120$ R_z-Messwerte ergibt sich:

1. Bestimmung von Mittelwert $\mu_t = \bar{x}$ und Standardabweichung $\sigma_t = S$ der Messreihe:

$$\mu_t = \bar{x} = 2,4232$$

$$\sigma_t = S = 1,1368$$

2. Berechnung einer Hilfsgröße $Q(\omega)$ über eine Hilfsgröße ω und zwei Polynome P_3 und P_4 bei einem unteren Stutzpunkt $a = 0$:

$$\omega = \frac{\sigma_t^2}{(a-\mu_t)^2} = \frac{1,1368^2}{(0-2,4232)^2} = 0,2201$$

$$P_3(\omega) = 1 + 5,74050101\omega - 13,53427037\omega^2 + 6,88665552\omega^3 = 1,6813$$

$$P_4(\omega) = -0,00374615 + 0,17462558\omega - 2,87168509\omega^2 + 17,48932655\omega^3 - 11,91716546\omega^4 = 0,05408$$

$$Q(\omega) = \frac{P_4(\omega)}{P_3(\omega)} = 0,0322$$

3. Berechnung der ungestutzten Parameter μ und σ:

$$\mu = \mu_t + Q(\omega) \cdot (a - \mu_t) = 2,4232 + 0,0322 \cdot (0 - 2,4232) = 2,3452$$

$$\sigma^2 = \sigma_t^2 + Q(\omega) \cdot (a - \mu_t)^2 = 1,1368^2 + 0,322 \cdot (0 - 2,4232)^2 = 1,2171$$

Die Betragsverteilung 1. Art ist damit über die beiden Parameter $\mu = 2,3452$ und $\sigma = 1,2171$ sowie den Stutzpunkt $a = 0$ festgelegt.

Verteilungsprüfung der Messreihe Für die Rauheits-Messwerte R_z wird ein Wahrscheinlichkeitsnetz gezeichnet (s. Abbildung 5, S. 15). Die Punkte der Messreihe liegen sehr dicht an der Ideallinie (graue Linie), so dass hier die GMV-Annahme bestätigt wird.

Die R_Z-Messwerte folgen damit einer Betragsverteilung 1. Art.

Berechnung der Prozessfähigkeit Die obere Spezifikationsgrenze OSG wurde vom Kunden vorgegeben als $OSG = 6\mu m$. Der C_{pk} wird auf zwei unterschiedliche Methoden bestimmt:

Methode 1: Quantile der Betragsverteilung 1. Art
Methode 2: Quantile der Messreihe (Methode M4 mit Median nach ISO 21747)

Die Quantile der Betragsverteilung 1. Art qb mit $\mu = 2,3452$ und $\sigma = 1,2171$ sind:

$$qb_{50} = 2,3864$$

$$qb_{99,865} = 6,0066$$

Ermittelt wurden diese Quantile mit der Software R.

Berechnung der Quantilwerte in R:

```
library(msm)
q50=qtnorm(0.5, 2.3452, 1.2171, 0)
q50
q99865=qtnorm(0.99865, 2.3452, 1.2171, 0)
q99865
```

Anmerkung: In R wird anstelle des Kommas als Dezimalzeichen ein Punkt verwendet.

Die empirischen Quantile qe aus der Messreihe berechnen sich zu:

$$qe_{50} = 2,4250$$

$$qe_{99,865} = 5,0300$$

Durch die verschiedenen Quantilwerte ergeben sich zwei Fähigkeitsindizes:

$$Cb_{pk} = \widehat{C_{pko}} = \frac{OSG - qb_{50}}{qb_{99,865} - qb_{50}} = \frac{6 - 2,3864}{6,0066 - 2,3864} = 0,9982$$

$$Ce_{pk} = \widehat{C_{pko}} = \frac{OSG - qe_{50}}{qe_{99,865} - qe_{50}} = \frac{6 - 2,4250}{5,0300 - 2,4250} = 1,3724$$

Mit den Quantilen der Betragsverteilung ist damit der Prozess nicht fähig, da der C_{pk} kleiner als 1 ist. Nach der M4-Methode ist der Prozess mit $C_{pk} > 1,33$ fähig.

Eine grobe Abschätzung der ppm-Zahlen ist mit dem ppm-Rechner (z. B. bei Wikipedia) möglich. Bei normalverteilten Messwerten (die hier nicht vorliegen), entspräche ein $C_{pk} = 1,0$ 1350 ppm und ein $C_{pk} = 1,37$ 20 ppm . Der Unterschied in den Ausschuss-Zahlen liegt demnach bei einem **Faktor 70**!

Bewertung der unterschiedlichen Fähigkeits-Werte Nun könnte es ja noch sein, dass die M4-Methode der ISO 21747 viel besser und zuverlässiger ist als die Bestimmung der Fähigkeit über die Betragsverteilung. Tatsächlich handelt es sich bei den Rauheits-Werten um simulierte Daten, die aus einer Betragsverteilung 1. Art stammen und keinen Messfehler haben.

Die echten Parameter der Grundgesamtheit waren $\mu_{GG} = 2,5$ und $\sigma_{GG} = 1,2$. Mit der Berechnungsvorschrift wurden aus der Messreihe $\mu = 2,3864$ und $\sigma = 1,2171$ geschätzt. Der echte Fähigkeitsindex liegt bei $C_{pk}(GG) = 0,97$, d. h. durch die Quantile der Betragsverteilung konnte die Fähigkeit sehr zuverlässig bestimmt werden. Tatsächlich liegt die ppm -Zahl in der Grundgesamtheit bei 1800. **Die M4-Methode der ISO 21747 überschätzte die tatsächliche Fähigkeit für diese Messreihe um den Faktor 90.**

In der Praxis können die Differenzen zwischen tatsächlicher Fähigkeit und über die M4-Methode berechnete Fähigkeit noch größer werden, da hier Messungenauigkeiten die Messwerte verfälschen. Das obige Ergebnis ist auch kein besonders krasser Fall. Bei einer Simulationsstudie wurde gezeigt, dass die Fähigkeit durch die M4-Methode teilweise um bis zu 800-1000 Mal höher geschätzt wurde als sie tatsächlich war. Auch die M3-Methode hilft an dieser Stelle nicht weiter.

Um Fähigkeiten zuverlässig einschätzen zu können, muss die Verteilung der Messwerte in der Gesamtheit bestimmt werden. Ohne Verteilung, d. h. nur mit empirischen Quantilen wie von der ISO 21747 empfohlen, lassen sich Fähigkeiten von nullbegrenzten Merkmalen nicht zuverlässig bestimmen.

4.3 Fähigkeitskennzahlen bei systematischen Einflüssen auf das Prozess-Ergebnis

Wenn Messwerte keiner GMV-Verteilung folgen, gibt es dafür immer einen Grund: Systematische Einflüsse auf den Prozess. Solange diese systematischen Einflüsse nicht identifiziert und durch ein geeignetes statistisches Prozess-Modell (SPM) beschrieben werden, kann auch keine zuverlässige Aussage zur Prozess-Fähigkeit gemacht werden.

Nach verschiedenen Untersuchungen sind die wenigsten Prozess-Ergebnisse (zwischen 2 und 10 %, je nach Studie) normalverteilt. Das ist auch aus statistischer Sicht logisch, weil in Prozessen die Einstellgrößen sehr oft einen systematischen Einfluss auf das Prozess-Ergebnis haben.

Hat z. B. der Druck einen entscheidenden Einfluss auf das Prozess-Ergebnis und werden variable Drücke angelegt, verändert sich das Prozess-Ergebnis in Abhängigkeit von der Druck-Einstellung. Bei der Einschätzung, wie fähig der Prozess unter normalen Serienbedingungen ist, muss damit der Einfluss durch den Druck berücksichtigt werden. Es reicht nicht aus, mit den Messwerten Fähigkeits-Indizes zu berechnen und so zu tun, als wäre die Einstellung für den Druck für das Prozess-Ergebnis unwichtig.

Zudem ergibt sich durch systematische Einflüsse eine Verfälschung der Fähigkeits-Berechnung, da die Fähigkeits-Kennzahlen auf der Basis von Verteilungs-Quantilen errechnet werden. Wird die falsche Verteilung für die Bestimmung der Quantile verwendet, wird die Prozess-Fähigkeit über- oder unterschätzt. Der Ausweg über empirische Quantile wie von der ISO 21747 empfohlen, bei denen keine Verteilung angenommen wird, liefert irreführende Ergebnisse (s. obiges Beispiel). Auch die Berechnung der „passenden“Verteilung ist kein Ausweg, wie Abschnitt 4.1.1, S. 14 zeigt.

Insofern bleibt für eine zuverlässige Einschätzung der Prozess-Fähigkeit nur die Möglichkeit über, ein valdiertes statistisches Prozess-Modell zu entwickeln und auf der Basis dieses Prozess-Modells (SPMs) haltbare Fähigkeits-Aussagen anzugeben.

Diese Methode findet unter anderem im Bereich der Versuchsplanung und -auswertung (Design of Experiments / DoE) in Deutschland immer größeren Zuspruch. Sie funktioniert allerdings auch mit den normalen Prozess-Daten, die heute in vielen Unternehmen über das BDE- oder MDE-System erfasst werden.

5 Berechnung von Fähigkeitskennzahlen für attributive Merkmale

Bei attributiven Merkmalen wie einer Gut-Schlecht-Prüfung kann als Kennzahl für die Fähigkeit eines Prozesses ausschließlich der Anteil Schlecht-Teile verwendet werden. Eine Feststellung, wie schlecht die Teile sind (d. h. wie weit von der Spezifikationsgrenze entfernt), gibt es naturgemäß bei einer i. O. / n. i. O.-Prüfung nicht.

5.1 Attributive Fähigkeitskennzahl

Damit gibt es für die Beurteilung von attributiven Prüfergebnissen auch nur eine Kennzahl, die dem C_p bei variablen Merkmalen entspricht:

$$C_p = \frac{1}{3} u_{1-niO}$$

mit u_α α-Quantil der Standardnormalverteilung (wie oben beschrieben) und niO Anteil Schlecht-Teile.

Der attributive Fähigkeitsindex ist allerdings sehr konservativ, d. h. er liefert erst für sehr kleine Ausschuss-Anteile akzeptable C_p-Werte. Um einen C_p-Wert von 1,67 zu erreichen, muss der Ausschuss-Anteil kleiner als 0,3 ppm sein, d. h. theoretisch müssten 3,5 Millionen Teile gut sein, bevor ein n. i. O.-Teil im Prozess auftaucht.

5.2 Beispiel attributive Fähigkeitskennzahl

Bei der Produktion von Stahlrohren wird mit Hilfe einer Lehre geprüft, ob die Stahlrohre über einem bestimmten Durchmesser liegen. In der Vergangenheit wurde dabei insgesamt ein Ausschuss-Anteil von 0,2 % festgestellt.

Damit ergibt sich als attributive Fähigkeit:

$$C_p = \frac{1}{3} u_{1-niO} = \frac{1}{3} u_{1-0,002} = \frac{1}{3} u_{0,998} = \frac{1}{3} 2,8782 = 0,9594$$

6 Quellen und Autorin

Quellen:

Einführung in die Statistik: Fahrmeier, Ludwig; Künstler, Rita; Pigeot, Iris; Tutz, Gerhard [2004]: *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. Springer Verlag, ISBN 978-3540697138
AD-Test, Normalverteilung, Betragsverteilung: Groß, Jürgen [2004]: *A normal distribution course*. Peter Lang Verlag, ISBN 978-3631529348
Statistische Tests und Kennzahlen: Hartung, Joachim [1991]: *Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenbourg Verlag, ISBN 978-3486578904
Algorithmus für die Bestimmung der Betragsverteilung 1. Art: Schneider, Helmut [1986]: *Truncated and Censored Samples From Normal Populations*. Marcel Dekker Verlag, ISBN 978-0824775919 Chapter 3, p. 28ff.
Prozess-Analyse und -Optimierung: Weihs, Claus; Jessenberger, Jutta [1998]: *Statistische Methoden zur Qualitätssicherung und -optimierung in der Industrie*. Wiley-VCH Verlag, ISBN 978-3527296170
(zur Zeit leider vergriffen)

Barbara Bredner
Statistische Beratung und Lösungen
Im Bruch 23
D-59439 Holzwickede
E-Mail: info@bb-sbl.de
Web: www.bb-sbl.de

Stand: 17.02.2010